

Tilburg University

Aanpassingskosten in een dynamisch model van de onderneming

Kort, P.M.

Publication date:
1985

[Link to publication in Tilburg University Research Portal](#)

Citation for published version (APA):

Kort, P. M. (1985). *Aanpassingskosten in een dynamisch model van de onderneming*. (Ter discussie FEW; Vol. 85.02). Unknown Publisher.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

CBM

R7

7627

1985

2

176

Bestemming 1985	TJDSCHRIFTENBUREAU BIBLIOTHEEK KATHOLIEKE HOGESCHOOL TILBURG	Nr. 1985
-------------------------------	--	------------------------



subfaculteit der econometrie



* C I N O O 2 2 5 *

REEKS "TER DISCUSSIE"



R 5

T theory of firm
T dynamic models

Katholieke
Hogeschool
Tilburg



No. 85.02

Aanpassingskosten in een dynamisch model van de onderneming

door

P.M. Kort

maart 1985

Samenvatting

Doel van deze bijdrage is het analyseren van de invloed van een convexe aanpassingskostenfunctie op het optimale beleid binnen een dynamisch model van het ondernemingsgedrag.

Kenmerkende verschillen tussen de uitkomsten van dit betreffende model en andere dynamische ondernemingsmodellen zijn o.a. het continue verloop in de tijd van de investeringen en het ontbreken van een stationaire situatie wat betreft de kapitaalgoederenvoorraad.*)

*) Voor het tot stand komen van dit artikel dank ik prof.dr. P.J.J.M. van Loon, prof.dr. P.A. Verheyen en drs. G.J.C.Th. van Schijndel.

Inhoudsopgave

blz.

Samenvatting	1
Inhoudsopgave	11
Inleiding	1
1. De economische oorzaken van aanpassingskosten	1
2. De vorm van de aanpassingskostencurve en de gevolgen daarvan voor het investeringsgedrag	3
3. Formulering van een dynamisch model met aanpassingskosten	5
4. De optimale ontwikkelingspatronen	10
Slotbeschouwing	14
Literatuurlijst	15
Appendix 1. Afleiding m.b.v. het maximumprincipe van Pontryagin en de iteratieve procedure van Van Loon van de optimale ontwikkelingspatronen van het model met aanpassingskosten	16
Appendix 2. Afleiding m.b.v. het maximumprincipe van Pontryagin en de iteratieve procedure van Van Loon van het optimale ontwikkelingspatroon van het model zonder aanpassingskosten	36
Appendix 3. Afleiding van de centrale beslissingsregel voor de investeringen op hoofdontwikkelingspatroon 1 van het model met aanpassingskosten	40

Inleiding

Het bekend worden van de variatierekening en het maximumprincipe van Pontryagin binnen de theorie van de onderneming heeft de mogelijkheid geopend om werkelijk dynamische modellen van het ondernemingsgedrag op te stellen en analytisch op te lossen.

Een van de eerste dynamische modellen is afkomstig van Jorgenson (1967). Echter, de uitkomst van dit model heeft de eigenschap dat de omvang van de kapitaalgoederenvoorraad al op het begintijdstip van de planningperiode naar zijn optimale niveau springt. In de literatuur zijn in het algemeen twee methoden bekend om deze onrealistische onmiddellijke aanpassing te ondervangen. De eerste manier is het aanbrengen van een financieringsstructuur in het model. Dit wordt o.a. gedaan in de modellen van Leland (1972), Ludwig (1978) en Van Loon & Verheyen (1984).

De tweede manier is het inbouwen van aanpassingskosten in een dynamisch model. De bekendste namen die zich hiermee bezig gehouden hebben, zijn Gould (1968), Lucas (1967 (2x)) en Treadway (1969, 1970, 1971, 1974). Een helder overzichtsartikel op dit gebied is geschreven door Söderström (1976).

De bedoeling van dit artikel is om een dynamisch ondernemingsmodel te analyseren waarin zowel een financieringsstructuur als aanpassingskosten zijn opgenomen, met nadruk op de aanpassingskosten.

In de eerste twee paragrafen geven we een overzicht van de theorie op het gebied van de aanpassingskosten, waarna in paragraaf 3 het dynamisch ondernemingsmodel wordt opgebouwd. De optimale oplossingen van dit model, afgeleid in appendix 1, worden besproken in paragraaf 4. In deze laatste paragraaf worden de verschillen tussen de optimale ontwikkelingspatronen van een model met en een model zonder aanpassingskosten (appendix 2) geanalyseerd.

1. De economische oorzaken van aanpassingskosten

Aanpassingskosten ontstaan bij het investeren door een onderneming. In de literatuur wordt een onderscheid gemaakt tussen externe en interne aanpassingskosten (zie bijv. Brechling (1975)).

We spreken van externe aanpassingskosten als de omvang van de aanpassing geen invloed heeft op het productieproces van de onderneming.

Een voorbeeld van externe aanpassingskosten is het volgende:

Stel, een onderneming heeft te maken met een markt voor investeringsgoederen die monopsonistische trekken vertoont. Dit heeft tot gevolg dat hoe groter de investering is, des te hoger de prijs van die investeringsgoederen. Deze extra betaling t.g.v. prijsverhogingen noemen we aanpassingskosten welke steeds sneller stijgen als functie van de investeringen.

Verdere voorbeelden van externe aanpassingskosten zijn: kosten als gevolg van het gebruikmaken van een architect, advertentiekosten t.b.v. nieuwe vacatures en verhuiskosten van nieuwe employees.

Interne aanpassingskosten zijn kosten waarbij de omvang van de aanpassing wel invloed heeft op het produktieproces.

Een voorbeeld hiervan is het bijscholen van nieuwe werknemers door werknemers die al langer bij de onderneming in dienst zijn en die zo aan het produktieproces moeten worden onttrokken. Een logisch gevolg hiervan is dat de output daalt. Installatiekosten en organisatiekosten zijn andere voorbeelden van interne aanpassingskosten.

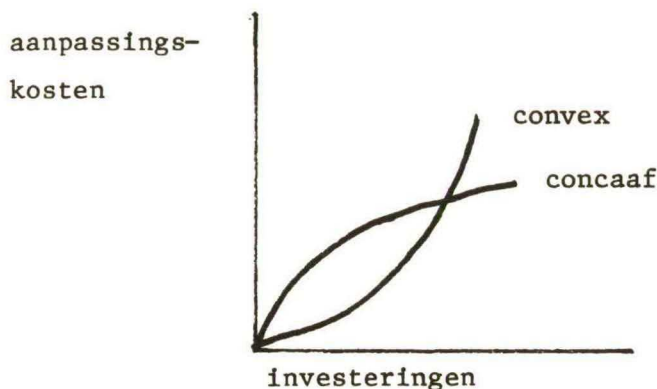
Als we bovenstaande voorbeelden van aanpassingskosten bestuderen, dan zien we dat die aanpassingskosten vooral afhankelijk zijn van de uitbreidingsinvesteringen.

Het is echter zeer waarschijnlijk dat de aanpassingskosten ook afhangen van de vervangingsinvesteringen. Een onderneming met activa met een korte levensduur zal hogere aanpassingskosten hebben dan een onderneming met activa met een lange levensduur en Lucas (1967) noemt in dit verband het voorbeeld van het vervangen van een oude computer door een geheel nieuwe versie.

De mogelijkheid bestaat dat de aanpassingskosten niet alleen een functie zijn van de investeringen, maar dat ze ook in negatieve zin kunnen afhangen van de absolute grootte van de kapitaalgoederenvoorraad: de aanpassingskosten als gevolg van het aanwerven van een nieuwe machine kunnen kleiner zijn als men al een zeer groot aantal van die machines heeft staan, dan wanneer men er niet één in bezit heeft (Gould, 1968). Hayashi (1982) bijvoorbeeld werkt met aanpassingskostenfuncties waarin de kapitaalgoederenvoorraad als geheel is opgenomen.

2. De vorm van de aanpassingskostencurve en de gevolgen daarvan voor het investeringsgedrag

Het investeringsbeleid van een onderneming hangt in belangrijke mate af van de vorm van de aanpassingskostencurve.



figuur 2.1: de curve van de aanpassingskosten

Bij een convex verloop hebben we te maken met stijgende marginale aanpassingskosten. Dit heeft tot gevolg dat de aanpassingskosten bij gegeven aanpassing hoger zijn als de aanpassing tot de gewenste kapitaalgoederenvoorraad sneller verloopt. We zouden zelfs kunnen concluderen dat bij een strikt convex verloop van de aanpassingskostencurve de gewenste omvang van de kapitaalgoederenvoorraad nooit bereikt wordt, omdat het vanuit kostenoverwegingen altijd beter is de laatste aanpassing in tweeën te splitsen.

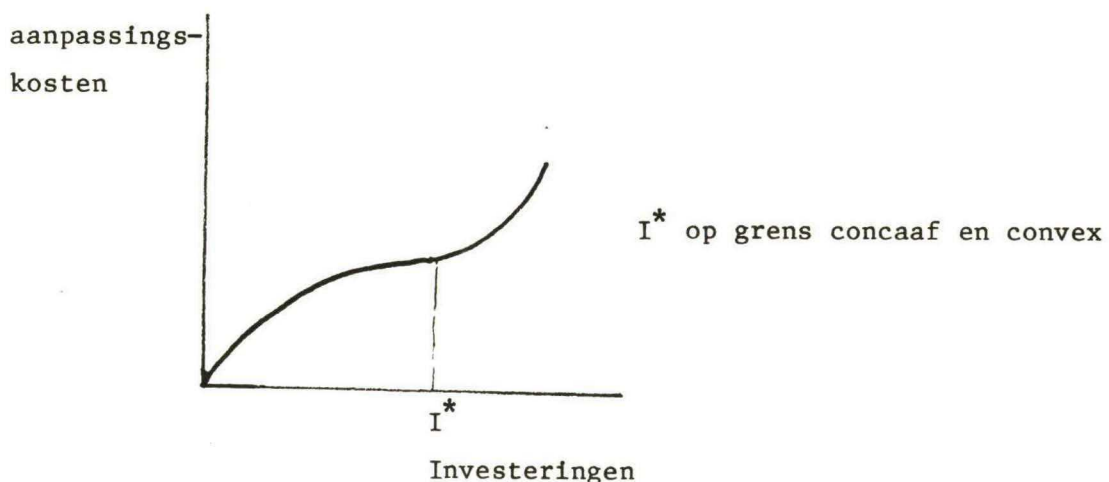
Wanneer de aanpassingskostencurve een concaaf verloop heeft, dalen de marginale kosten bij stijgende investeringen. Daarom is in dit geval een onmiddellijke aanpassing tot de gewenste kapitaalgoederenvoorraad optimaal.

Het effect van een concave aanpassingskostencurve (grote investeringen zijn relatief goedkoop uit kosten oogpunt) doet denken aan "Economies of Scale". "Economies of Scale" wil zeggen dat grote ondernemingen goedkoper kunnen produceren dan kleine ondernemingen vanwege schaalvoordelen. Het verschil tussen concave aanpassingskosten en "Economies of Scale" is dat de laatste afhankelijk zijn van de omvang van de kapitaalgoederenvoorraad, terwijl de eerste een functie zijn van de grootte van de investeringen.

Het verschil in het handelen van een onderneming met concave aanpassingskosten en een onderneming zonder aanpassingskosten is dat de eerste onderneming van

een kleine investering kan afzien vanwege de mogelijk te hoge aanpassingskosten die daaraan verbonden zijn en de tweede de kleine investering uitvoert. De eerste onderneming gaat dan in plaats van te investeren bijv. de hoeveelheid arbeid vergroten en indien mogelijk de prijzen van zijn produkten verhogen. Deze handelwijze komt ook voor bij langzame aanpassing als gevolg van convexe aanpassingskosten, omdat de grootte van de kapitaalgoederenvoorraad, bestemd om de gewenste hoeveelheid produkten te maken, pas na verloop van tijd wordt bereikt.

In verreweg de meeste modellen wordt een convex verloop van de aanpassingskosten verondersteld. In feite is in de literatuur voor elke mogelijke aanpassingskostenfunctie een verdediging te vinden. Brechling (1975), Rothschild (1971) en Nickell (1978) zijn bijv. voorstander van een aanpassingskostencurve die eerst een concaaf en vervolgens een convex verloop heeft.



figuur 2.2: curve van aanpassingskosten

Deze curve heeft o.a. als kenmerk dat als de aanpassing groter moet zijn dan I^* , iedere investering ook groter of gelijk is aan I^* , want is de investering kleiner, dan zijn de gemiddelde kosten altijd groter dan bij I^* .

In het volgende schema zijn allerlei argumenten opgenomen die pleiten voor een bepaalde vorm van de aanpassingskostenfunctie.

Convexe aanpassingskostenfunctie	Concave aanpassingskostenfunctie
<ul style="list-style-type: none"> - Een snelle verandering heeft meestal dure gevolgen ("Haste makes waste"). - Een markt voor investeringsgoederen met monopsonistische trekken heeft tot gevolg dat hoe groter de investering is, des te hoger de prijs van die investeringsgoederen. - Scholing voor arbeiders. Grote omscholingsprogramma's hebben allerlei bijkomende kosten, zoals kantine, administratiekosten, etc. - Bij een reorganisatie op kleine schaal hoeft de onderneming geen werknemers van buitenaf aan te trekken. Dat is bij een reorganisatie op grote schaal wel het geval. 	<ul style="list-style-type: none"> - Kwantumkorting. - "Convex costs of adjustment functions may help to explain why Rome was not built in a day. However, there is no clear saving and may be some loss to spreading the work of installing a button on a shirt over several weeks." (Rothschild, 1971.) - Scholing van arbeiders. Zowel voor 1, 2 of voor 20 leerlingen kan men het wel met één leraar af. - Organisatie hangt af van informatie: wanneer we eenmaal weten hoe we één produktie-unit moeten organiseren, dan weten we dat ook bij 2, 3 of n produktie-units.

3. Formulering van een dynamisch model met aanpassingskosten

In deze paragraaf gaan we een aanpassingskostenfunctie inbouwen in een dynamisch model. We kiezen voor een strikt convexe vorm en we nemen de aanpassingskosten als functie van de bruto-investeringen.

We beginnen met een aantal definities van variabelen:

K = de fysieke kapitaalgoederenvoorraad in geldeenheden. Wat betreft de geldeenheden veronderstellen we dat die een zodanige waarde hebben dat één eenheid kapitaal precies één geldeenheid kost;

C = de som van K en de uitgaven benodigd om te gaan produceren met deze kapitaalgoederen minus de reeds afgeschreven aanpassingskosten van deze kapitaalgoederen;

I = alle uitgaven behorende bij de aanschaf en het gaan produceren met nieuwe kapitaalgoederen.

Opmerking: als de tijdsindex duidelijk is, wordt deze weggelaten, dus bijv. I i.p.v. $I(T)$.

De bewegingsvergelijkingen zijn nu gelijk aan:

$$\dot{C} := \frac{dC}{dT} = I - aC \quad (1)$$

$$\dot{K} := \frac{dK}{dT} = I - U(I) - aK \quad (2)$$

waarbij:

a = de afschrijvingsgraad

$U(I)$ = aanpassingskostenfunctie ($\frac{dU}{dI} > 0$)

de aanpassingskostenfunctie is strikt convex, dus: $\frac{d^2U}{dI^2} > 0$

T = tijdseenheid

Voor de rest van het model nemen we als uitgangspunten drie bekende financiële rekeningen uit de bedrijfseconomie: de balans, de resultatenrekening en het kasoverzicht.

In dit artikel veronderstellen we dat de investeringen van een onderneming alleen gefinancierd kunnen worden door winstinhoudingen. Er zal dus geen sprake zijn van een aandelenemissie of financiering met vreemd vermogen. Ook is er maar één vorm van activa: de kapitaalgoederen.

balans	
C	X

waarbij:

X = vermogen in geldeenheden.

Uit deze balans leiden we de volgende gelijkheid af:

$$C = X \quad (3)$$

Verder geldt de volgende resultatenrekening:

<u>resultatenrekening</u>	
S(K)	aC
	D
	•
	X

waarbij:

$S(K)$ = opbrengsten ($\frac{dS}{dK} > 0$, $\frac{d^2S}{dK^2} < 0$ (afnemende meeropbrengsten),

$S(K)$ en $\frac{dS}{dK}$ zijn continue functies van K .)

D = dividend

In de resultatenrekening is te zien dat de uitkeerbare winst $(S(K) - aC)$ wordt gebruikt voor winstinhoudingen (X) en dividendbetalingen (D). Dus:

$$\begin{aligned} S(K) - aC &= D + \dot{X} \\ \rightarrow \dot{X} &= S(K) - aC - D \end{aligned} \quad (4)$$

Aan de creditzijde van de resultatenrekening staat in tegenstelling tot vele modellen, nu aC in plaats van aK , omdat ook de gekapitaliseerde aanpassingskosten terugverdiend moeten worden. Het kasoverzicht tenslotte heeft de volgende vorm:

<u>kasoverzicht</u>	
S(K)	I
	D

Uit dit overzicht volgt onderstaande vergelijking:

$$D = S(K) - I \quad (5)$$

We veronderstellen verder dat de onderneming de stuurvariabele D en I zodanig kiest dat zij de waarde van de onderneming voor de aandeelhouders maximaliseert. Deze wordt bepaald door de netto-contante waarde van de dividendstroom over de gehele planperiode plus de gediscoteerde eindwaarde van de onderne-

ming. De doelstellingsfunctie ziet er dus als volgt uit:

$$\max_{I,D} \int_0^z e^{-iT} dT + K(z)e^{-iz} \quad (6)$$

waarbij:

i = tijdsvoorkeursvoet van de aandeelhouders

z = planningshorizon

Wat betreft de dividendpolitiek zullen we veronderstellen dat de onderneming niet verplicht is om dividend uit te keren, dus:

$$D \geq 0 \quad (7)$$

Verder veronderstellen we dat desinvesteringen niet mogelijk zijn, dus:

$$I \geq 0 \quad (8)$$

De beginwaarden van C en K zijn gelijk aan C_0 en K_0 :

$$C(0) = C_0 \quad (9)$$

$$K(0) = K_0 \quad (10)$$

Nu we alle kenmerken van het model besproken hebben, vatten we het totale model samen:

$$\max_{I,D} \int_0^z D e^{-iT} dT + K(z)e^{-iz} \quad (11)$$

o.v.d.

$$\dot{C} = I - aC \quad (12)$$

$$\dot{K} = I - U(I) - aK \quad (13)$$

$$\dot{X} = S(K) - aC - D \quad (14)$$

$$C = X \quad (15)$$

$$C \geq 0 \quad (16)$$

$$K \geq 0 \quad (17)$$

$$I \geq 0 \quad (18)$$

$$D \geq 0 \quad (19)$$

$$C(0) = C_0, K(0) = K_0 \quad (20), (21)$$

Voor dit model worden in appendix 1, m.b.v. het door Russak aangepaste maximumprincipe van Pontryagin, noodzakelijke voorwaarden opgesteld waaraan de optimale oplossing moet voldoen. Gebruikmakend van deze noodzakelijke voorwaarden worden met de iteratieve procedure van Van Loon (1983) optimale ontwikkelingspatronen afgeleid.

Teneinde oninteressante ontwikkelingspaden uit te sluiten, nemen we de volgende veronderstelling aan:

$$\text{Voor } K(T) = 0 \text{ geldt } \frac{dS}{dK} > 1 + a \quad (22)$$

Het idee achter deze veronderstelling is, dat het altijd lonend is om een positieve kapitaalgoederenvoorraad te hebben. Op deze manier kunnen we uitsluiten dat K ooit gelijk is aan 0 gedurende de planningsperiode.

In het volgende hoofdstuk analyseren we de optimale ontwikkelingspatronen. Om wat meer inzicht te krijgen in de kenmerken van deze patronen vergelijken we deze met de optimale oplossing van een model zonder aanpassingskosten. Deze wordt m.b.v. dezelfde technieken als in appendix 1 in appendix 2 afgeleid. Het model zonder aanpassingskosten is als volgt:

$$\max_{D, I} \int_0^z D e^{-iT} dT + K(z) e^{-iz} \quad (23)$$

o.v.d.

$$\dot{K} = I - aK \quad (24)$$

$$\dot{X} = S(K) - aK - D \quad (25)$$

$$K = X \quad (26)$$

$$D \geq 0 \quad (27)$$

$$K \geq 0 \quad (28)$$

$$I \geq 0 \quad (29)$$

Bij dit model maken we nog de veronderstelling, zie (22): Voor $K(T) = 0$ geldt:

$$\frac{dS}{dK} > 1 + a \quad (30)$$

4. De optimale ontwikkelingspatronen

In appendix 1 worden de optimale ontwikkelingspatronen m.b.v. het maximumprincipe van Pontryagin en de iteratieve procedure van Van Loon afgeleid. Elk ontwikkelingspatroon bestaat uit een reeks paden. Elk pad stelt een bepaalde politiek van de onderneming voor en wordt gekarakteriseerd door het actief of inactief zijn van bepaalde restricties.

De ontwikkelingspatronen in ons probleem bestaat uit een deelverzameling van drie verschillende paden, die we weergeven in tabel 4.1.

nr. pad	I	D (= S(K)-I)
1	max	0
2	+	+
3	0	max

tabel 4.1: de karakteristieken van de paden

Uit bovenstaande tabel kunnen we concluderen dat pad 1 een groeipad is, want alle winst wordt ingehouden om te investeren. Op pad 3 wordt er niets geïnvesteerd, zodat sprake is van een uitkeringspad. Pad 2 zit hiertussen in.

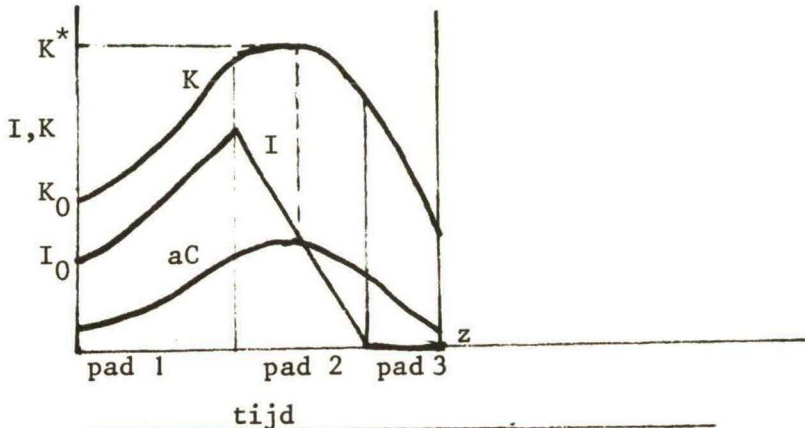
In appendix 1 worden de optimale ontwikkelingspatronen van de onderneming afgeleid, met daarin twee hoofdontwikkelingspatronen:

hoofdontwikkelingspatroon 1: pad 1 - pad 2 - pad 3

hoofdontwikkelingspatroon 2: pad 3 - pad 2 - pad 3

In dit hoofdstuk gaan we in op hoofdontwikkelingspatroon 1 (pad 1 - pad 2 - pad 3).

In appendix 1 hebben we de volgende grafiek afgeleid:



figuur 4.1: ontwikkelingspatroon 1 met aanpassingskosten

Pad 1 is een groeipad. Op dit pad stijgen K en I progressief. Hoe groter K wordt, des te kleiner wordt $\frac{dS}{dK}$ (afnemende meeropbrengsten).

Uit figuur 4.1 blijkt dat I continu is. Daar de aanpassingskostenfunctie convex is, brengen hele grote waarden van I hoge kosten met zich mee. Om dit te voorkomen, ontwikkelt I zich geleidelijk in de tijd.

Omdat I continu is, blijft K op pad 2 eerst nog doorgroeien. I daalt echter wel gedurende heel pad 2. K blijft stijgen totdat I beneden het niveau van aC komt. Dat betekent dat er vanaf dat tijdstip meer afgeschreven dan geïnvesteerd wordt, hetgeen tot gevolg heeft dat K gaat dalen. De investeringen blijven dalen totdat ze gelijk aan 0 worden. Dan gaat pad 2 over in pad 3. Dit laatste is het geval juist voor tijdstip z , want dan kunnen de aanpassingskosten die zouden ontstaan bij een positieve I niet meer terugverdiend worden.

In appendix 3 hebben we een beslissingsregel afgeleid die ons informatie geeft over het niveau van de investeringen op de verschillende paden. Op pad 2 wordt het investeringsniveau zodanig bepaald dat:

$$e^{-it_0} = \left(1 - \frac{dU}{dI}\right)e^{-iz} + \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) \int_{t_0}^z \left(\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2\right) dT \quad (1)$$

waarbij:

t_0 = een willekeurig tijdstip op pad 2

ψ_2 = een toegevoegde variabele die in de optimale oplossing van het dynamisch programmeringsprobleem met aanpassingskosten de invloed van een verandering van K op de waarde van de doelfunctie weergeeft.

Uit bovenstaande vergelijking volgt dat er op pad 2 zodanig wordt geïnvesteerd dat voor de laatste geïnvesteerde geldeenheid geldt, dat de opbrengst van deze geldeenheid, als die niet geïnvesteerd wordt, gelijk is aan de opbrengst van deze geldeenheid, als die wel geïnvesteerd wordt.

Immers:

e^{-it_0} = de contante waarde van één geldeenheid ontvangen op tijdstip t_0 als de onderneming deze geldeenheid niet investeert op tijdstip t_0 .

$(1 - \frac{dU}{dI})(e^{-iz} - \int_{t_0}^z a \psi_2 dT) =$ de contante restwaarde van één geldeenheid op tijdstip z als die op tijdstip t_0 wel geïnvesteerd is.

$(1 - \frac{dU}{dI})(\int_{t_0}^z \frac{dS}{dK} e^{-iT} dT) =$ de opbrengst van een op tijdstip t_0 geïnvesteerde geldeenheid gedurende de tijdsperiode t_0-z .

In appendix 3 is tevens bewezen dat de volgende relatie geldt op pad 3:

$$e^{-it_0} > (1 - \frac{dU}{dI})e^{-iz} + (1 - \frac{dU}{dI}) \int_{t_0}^z (\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2) dT \quad (2)$$

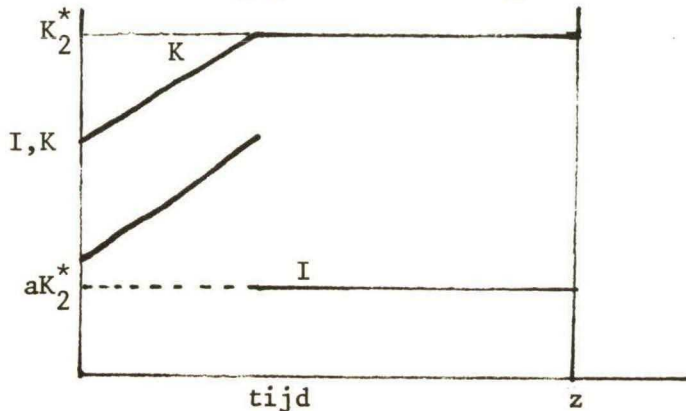
De opbrengst van het niet investeren van een geldeenheid is dus groter dan van het wel investeren op pad 3. Dit bevestigt onze eerdere conclusie, namelijk dat de tijd te kort is om de aanpassingskosten terug te verdienen.

Op pad 1 tenslotte, geldt de volgende relatie:

$$e^{-it_0} < (1 - \frac{dU}{dI})e^{-iz} + (1 + \frac{dU}{dI}) \int_{t_0}^z (\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2) dT \quad (3)$$

Dus op dit pad is de opbrengst van het wel investeren van de extra geldeenheid het grootst. Toch wordt er niet meer geïnvesteerd, want de financiering treedt als rem op.

Aan het einde van deze paragraaf vergelijken we de uitkomsten van hoofdontwikkelingspatroon 1 nog even met die van het model zonder aanpassingskosten. Uit het model zonder aanpassingskosten is bekend dat K doorgroeit totdat de marginale opbrengsten zover gedaald zijn dat ze gelijk zijn aan de marginale kosten ($\frac{dS}{dK} = i + a$ of $\frac{dO}{dK} = i$, zie appendix 2). Daarna blijft K constant op dit niveau. Dit is weergegeven in de volgende tekening.



figuur 4.2: ontwikkelingspatroon zonder aanpassingskosten

In het model zonder aanpassingskosten geldt voor K_z^* :

$$\frac{dS}{dK} = i + a \quad (4)$$

In het model met aanpassingskosten geldt voor K^* :

$$\frac{dS}{dK} > \frac{i+a}{\frac{1-dU}{dI}} \quad (\text{zie appendix 1}) \quad (5)$$

Uit het feit dat we met afnemende meeropbrengsten te maken hebben, volgt dat de top van K in figuur 4.2 hoger ligt dan in het model met aanpassingskosten. In het model zonder aanpassingskosten zal de groei van K sneller verlopen dan in het model met aanpassingskosten. De groei wordt in het eerste geval alleen geremd door de financiering, terwijl er in het tweede geval nog een extra rem d.m.v. de aanpassingskosten bij komt.

In figuur 4.2 valt verder nog de discontinuïteit van I op.

5. Slotbeschouwing

In een dynamisch model van de onderneming met een financieringsstructuur is een convexe aanpassingskostenfunctie opgenomen.

Met behulp van de 'optimal control' techniek is een aantal paden afgeleid, waarmee de ontwikkeling van de onderneming analytisch kan worden beschreven.

Enkele kenmerkende eigenschappen van deze ontwikkeling zijn:

- een minder snelle groei dan in een model zonder aanpassingskosten
- de top van de omvang van de kapitaalgoederenvoorraad ligt lager dan in een model zonder aanpassingskosten,
- gedurende de hele ontwikkeling zijn de investeringen als functie van de tijd continu,
- wat de kapitaalgoederenvoorraad betreft, is er geen stationaire situatie.

Reeds interessante punten voor verder onderzoek zouden we willen aanstippen:

- uitwerken van het model met $C(z)$ als eindwaarde i.p.v. $K(z)$;
- bestuderen van hoofdontwikkelingspatroon 2;
- uitwerken van het model met een concave aanpassingskostenfunctie;
- inbouwen van vreemd vermogen in het model.

Literatuurlijst

- (1) Arrow, Optimal capital adjustment, in Arrow c.s. (ed.), Studies in the mathematical theory of investment & production, Stanford University Press.
- (2) Brechling, Investment and employment decisions, 1975.
- (3) Gould, Adjustment costs in the theory of investment of the firm, Review of Economic Studies, 1968.
- (4) Hayashi, Tobin's marginal q and average q : a neoclassical interpretation, Econometrica, 1982.
- (5) Jorgenson, The theory of investment behaviour, in: R. Ferber (ed.): Determinants of investment behaviour, National Bureau of Economic Research, Columbia University Press, New York, 1967.
- (6) Leland, The dynamics of a revenue maximizing firm, International Economic Review, 1972.
- (7) Van Loon, A dynamic theory of the firm: production, finance and investment, Springer, Berlin, 1983.
- (8) Van Loon & Verheyen, Groeifasen in bedrijven, Maandblad voor accountancy en bedrijfshuishoudkunde, 1984.
- (9) Lucas, Tests of a capital-theoretical model of technological change, Review of Economic Studies, 1967.
- (10) Lucas, Optimal investment policy and the flexible accelerator, International Economic Review, 1967.
- (11) Ludwig, Optimale Expansionspfade der Unternehmung, Gabler, Wiesbaden, 1978.
- (12) Nickell, Investment decisions of firms, 1978.
- (13) Rothschild, On the cost of adjustment, Quarterly Journal of Economics, 1971.
- (14) Söderström, Production and investment under costs of adjustment, a survey, Zeitschrift für Nationalökonomie, 1976.
- (15) Treadway, On rational entrepreneurial behaviour and the demand for investment, Review of Economic Studies, 1969.
- (16) Treadway, Adjustment costs and variable inputs in the theory of the competitive firm, Journal of Economic Theory, 1970.
- (17) Treadway, The rational multivariate accelerator, Econometrica, 1971.
- (18) Treadway, The globally optimal flexible accelerator, Journal of Economic Theory, 1974.

Appendix 1

Afleiding m.b.v. het maximumprincipe van Pontryagin en de iteratieve procedure van Van Loon van de optimale ontwikkelingspatronen van het model met aanpassingskosten.

In deze appendix zullen we de exacte afleiding van de analytische oplossing van het model met aanpassingskosten weergeven. Dit model gaan we eerst wat herschrijven.

Uit vergelijking (14) van hoofdstuk 3 volgt:

$$D = S(K) - aC - \dot{X} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} D = S(K) - aC - \dot{X} \\ \dot{X} = \dot{C} \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} D = S(K) - I \\ \text{welke vergelijking gelijk} \\ \text{is aan (5) uit hoofdstuk 3.} \end{matrix} \quad (1)$$

Uit (15) van hoofdstuk 3 leiden we af: $\dot{X} = \dot{C}$

M.b.v. bovenstaande vereenvoudigen we het model tot de volgende vorm:

$$\max_I \int_0^z (S(K) - I) e^{-iT} dT + K(z) e^{-iz} \quad (2)$$

o.d.v.

$$\dot{C} = I - aC \quad (3)$$

$$\dot{K} = I - U(I) - aK \quad (4)$$

$$S(K) - I \geq 0 \quad (5)$$

$$I \geq 0 \quad (6)$$

$$C \geq 0 \quad (7)$$

$$K \geq 0 \quad (8)$$

$$C(0) = C_0 \quad (9)$$

$$K(0) = K_0 \quad (10)$$

In dit model zijn K en C de toestandsvariabelen en I is de stuurvariabele. M.b.v. het door Russak aangepaste maximumprincipe van Pontryagin gaan we eerst noodzakelijke voorwaarden afleiden waaraan de optimale oplossing van dit model moet voldoen.

We kunnen hier niet het onaangepaste maximumprincipe van Pontryagin gebruiken, omdat in ons model de restricties (7) en (8) alleen maar toestandsvariabelen bevatten.

Noem nu:

$$H = (S(K)-I)e^{-it} + (\psi_1+\mu_1)(I-aC) + (\psi_2+\mu_2)(I-u(I) - aK) \quad (11)$$

de Hamiltoniaan en

$$L = H + \lambda_1(S(K)-I) + \lambda_2 I \quad (12)$$

de Lagrange-functie, waarbij

$\psi_j = \psi_j(T)$ de toegevoegde variabele, die in de optimale oplossing de invloed van een verandering van $C(T)$ en $K(T)$ op de waarde van de doel-functie weergeeft.

$\lambda_j = \lambda_j(T)$ de dynamische Lagrange-multiplicator, die in de optimale oplossing de schaduwprijs van de dividendvoorwaarde en van de investeringsvoorwaarde weergeeft op tijdstip T .

$\mu_j = \mu_j(T)$ kunstmatige variabele.

Voor een optimale oplossing moeten er functies $\psi_j(T)$, $\lambda_j(T)$ en $\mu_j(T)$ bestaan, die aan de volgende voorwaarden voldoen:

$$\frac{\delta L}{\delta I} = -e^{-iT} - \lambda_1 + \psi_1 + \mu_1 + (\psi_2+\mu_2) \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \lambda_2 = 0 \quad (13)$$

$$-\dot{\psi}_1 = -a (\psi_1+\mu_1) \quad (14)$$

$$-\dot{\psi}_2 = \frac{dS}{dK} (e^{-iT}+\lambda_1) - a(\psi_2+\mu_2) \quad (15)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 (S(K) - I) = 0 \\ \lambda_2 I = 0 \\ \dot{\mu}_1 C = 0 \\ \dot{\mu}_2 K = 0 \end{array} \right\} \text{complementariteitsvoorwaarden} \quad (16)$$

$$\lambda_2 I = 0 \quad (17)$$

$$\dot{\mu}_1 C = 0 \quad (18)$$

$$\dot{\mu}_2 K = 0 \quad (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} \psi_1(z) = 0 \\ \psi_2(z) = e^{-iz} \\ \mu_1(z)C(z) = 0 \\ \mu_2(z)K(z) = 0 \end{array} \right\} \text{transversaliteitsvoorwaarden} \quad (20)$$

$$\psi_2(z) = e^{-iz} \quad (21)$$

$$\mu_1(z)C(z) = 0 \quad (22)$$

$$\mu_2(z)K(z) = 0 \quad (23)$$

$$\psi_j(T) \text{ zijn continu met stuksgewijs continue afgeleiden op } [0, z] \quad (24)$$

$$\lambda_j(T) \text{ zijn niet negatief en continu als } I \text{ continu is} \quad (25)$$

$$\mu_1(T) \text{ is continu als } \dot{C} \text{ discontinu is} \quad (26)$$

$$\mu_2(T) \text{ is continu als } \dot{K} \text{ discontinu is} \quad (27)$$

$$\mu_j(T) \text{ continu als } I \text{ continu is, niet negatief en niet stijgend} \quad (28)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{C} = I - aC \\ C \text{ is continu} \end{array} \right\} \rightarrow \dot{C} \text{ is discontinu als } I \text{ discontinu is}$$

We hebben nu afgeleid: $\mu_1(T)$ is continu als I continu is en als I discontinu is $\rightarrow \mu_1(T)$ is altijd continu

Op eenzelfde wijze kunnen we de continuïteit van $\mu_2(T)$ bewijzen.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stel: } \dot{\mu}_1 \neq 0 \rightarrow C = 0 \\ C = I - aC \rightarrow C \text{ wordt nooit gelijk aan } 0, \\ \text{want } C(0) \neq 0 \text{ en } I \geq 0 \end{array} \right\} \dot{\mu}_1(T) = 0 \text{ voor } T \in [0, z]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eindsituatie: } \mu_1(z)C(z) = 0 \\ C(z) \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mu_1(z) = 0 \\ \text{we weten } \dot{\mu}_1 = 0 \\ \mu_1 \text{ continu} \end{array} \right\} \mu_1(T) = 0 \text{ voor } T \in [0, z]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stel: } \dot{\mu}_2 \neq 0 \rightarrow K = 0 \\ \text{bij } K(T) = 0 \text{ geldt: } \frac{dS}{dK} > 1 + a \\ \downarrow \\ \text{Uit deze voorwaarde volgt dat het} \\ \text{rendabel is om altijd een positieve} \\ \text{kapitaalgoederenvoorraad te hebben.} \end{array} \right\} \dot{\mu}_2(T) = 0 \text{ voor } T \in [0, z]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eindsituatie: } \mu_2(z)K(z) = 0 \\ K(z) \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mu_2(z) = 0 \\ \text{we weten } \dot{\mu}_2 = 0 \\ \mu_2 \text{ continu} \end{array} \right\} \mu_2(T) = 0 \text{ voor } T \in [0, z]$$

Vergelijking (14) ziet er nu als volgt uit:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= a \psi_1 \\ \frac{d\psi_1}{\psi_1} &= a dT \\ \psi_1 &= e^{aT} + E \end{aligned}$$

transversaliteitsvoorwaarde: $\psi_1(z) = 0 \rightarrow E = -e^{az}$

$\psi_1(T)$ is de bijdrage aan de doelstellingsfunctie van een marginale eenheid C toegekend op tijdstip T , op het begintijdstip.

Nu komt C niet in de doelstellingsfunctie voor, dus $\psi_1(T) = 0$ voor $t \in [0, z]$ welke vergelijking ook voldoet als oplossing van bovenstaande differentiaalvergelijking.

Na deze vereenvoudigingen houden we de volgende noodzakelijke voorwaarden over:

$$\frac{\delta L}{\delta I} = -e^{-iT} - \lambda_1 + \psi_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \lambda_2 = 0 \quad (29)$$

$$-\dot{\psi}_2 = \frac{dS}{dK} (e^{-iT} + \lambda_1) - a \psi_2 \quad (30)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 (S(K) - I) = 0 \\ \lambda_2 I = 0 \end{array} \right\} \text{complementariteitsvoorwaarden} \quad (31)$$

$$(32)$$

$$\psi_2(z) = e^{-iz} \rightarrow \text{transversaliteitsvoorwaarde} \quad (33)$$

Uit (31) en (32) leiden we vier mogelijke paden af:

paden	1	2	3	4
λ_1	+	0	0	+
λ_2	0	0	+	+

$$\left. \begin{array}{l} \text{Op pad 4 geldt: } \lambda_2 = + \rightarrow I = 0 \\ \lambda_1 = + \rightarrow S(K) - I = 0 \end{array} \right\} S(K) = 0 \rightarrow K = 0$$

Vanwege de veronderstelling dat $\frac{dS}{dK} > 1 + a$ voor $K(T) = 0$ geldt dat K nooit gelijk aan 0 zal zijn. Dus pad 4 is geen toegelaten pad en valt daarom af.

Nu gaan we de paden 1, 2 en 3 afzonderlijk bekijken.

pad 1 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$)

noodzakelijke voorwaarden

$$-e^{-iT} - \lambda_1 + \psi_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) = 0 \quad (34)$$

$$-\dot{\psi}_2 = \frac{dS}{dK} (e^{-iT} + \lambda_1) - a \psi_2 \quad (35)$$

$$S(K) - I = 0 \quad (36)$$

$$I \geq 0 \quad (37)$$

Op dit pad is I maximaal.

We veronderstellen dat I aan het begin van dit pad dusdanig groot is, dat

$$\left. \begin{aligned} I > aC + \dot{K} > 0 \\ \dot{I} = \frac{dS}{dK} \dot{K} \end{aligned} \right\} \dot{I} > 0 \rightarrow K \text{ en } I \text{ blijven stijgen op pad 1}$$

(34) differentiëren naar T :

$$I e^{-iT} - \dot{\lambda}_1 + \psi_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \psi_2 \frac{d^2U}{dI^2} \dot{I} = 0 \quad (38)$$

(35) invullen in (38):

$$I e^{-iT} - \dot{\lambda}_1 + (a \psi_2 - \frac{dS}{dK} (e^{-iT} + \lambda_1)) \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \psi_2 \frac{d^2U}{dI^2} \dot{I} = 0 \quad (39)$$

substitueer $\psi_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) = e^{-iT} + \lambda_1$ (volgt uit (34)) in (39):

$$I e^{-iT} + \dot{\lambda}_1 + a e^{-iT} + a \lambda_1 - \frac{dS}{dK} (e^{-iT} + \lambda_1) \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{(e^{-iT} + \lambda_1) \frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}} = 0$$

$$\dot{\lambda}_1 + \lambda_1 \left(-a + \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}}\right) = \left(1 + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}}\right) e^{-iT} \quad (40)$$

pad 2 ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$)

noodzakelijke voorwaarden:

$$-e^{-iT} + \psi_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) = 0 \quad (41)$$

$$-\dot{\psi}_2 = \frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2 \quad (42)$$

$$S(K) - I \geq 0 \quad (43)$$

$$I \geq 0 \quad (44)$$

(41) differentiëren naar T:

$$I e^{-iT} + \dot{\psi}_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \dot{\psi}_2 \frac{d^2U}{dI^2} I = 0 \quad (45)$$

substitueer (42) in (45):

$$I e^{-iT} + \left(a \psi_2 - \frac{dS}{dK} e^{-iT}\right) \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \psi_2 \frac{d^2U}{dI^2} I = 0 \quad (46)$$

substitueer $\psi_2 = \frac{e^{-iT}}{1 - \frac{dU}{dI}}$ (volgt uit (41)) in (46):

$$I e^{-iT} + a e^{-iT} - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) e^{-iT} - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} I}{1 - \frac{dU}{dI}} e^{-iT} = 0$$

$$\left(1 + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} I}{1 - \frac{dU}{dI}}\right) e^{-iT} = 0 \quad (47)$$

pad 3 ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$)

noodzakelijke voorwaarden

$$-e^{-iT} + \psi_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \lambda_2 = 0 \quad (48)$$

$$-\dot{\psi}_2 = \frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2 \quad (49)$$

$$S(K) - I \geq 0 \quad (50)$$

$$I = 0 \quad (51)$$

uit (51) volgt: $\dot{I} = 0$

(48) differentiëren naar T:

$$i e^{-iT} + \dot{\psi}_2 \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \dot{\lambda}_2 = 0 \quad (52)$$

substitueer (49) in (52):

$$i e^{-iT} + \left(a \psi_2 - \frac{dS}{dK} e^{-iT}\right) \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \dot{\lambda}_2 = 0 \quad (53)$$

substitueer $\psi_2 = \frac{e^{-iT} - \lambda_2}{1 - \frac{dU}{dI}}$ (volgt uit (48)) en (51) in (53):

$$i e^{-iT} + a e^{-iT} - a \lambda_2 - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI} (I = 0)\right) e^{-iT} + \dot{\lambda}_2 = 0$$

$$\rightarrow a \lambda_2 - \dot{\lambda}_2 = \left(i + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI} (I = 0)\right)\right) e^{-iT}$$

Vervolgens gaan we met de iteratieve procedure van Van Loon optimale ontwikkelingspatronen afleiden. Overeenkomstig deze procedure beginnen we achteraan met het koppelen der paden.

We gaan dus eerst kijken welk(e) pad(en) als eindpad dienst kan(kunnen) doen. Daartoe substitueren we de transversaliteitsvoorwaarde (33) in (29) en stellen we T gelijk aan z in (1).

Dan krijgen we:

$$-e^{iz} - \lambda_1 + e^{-iz} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \lambda_2 = 0$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{dU}{dI} e^{-iz}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ en } \lambda_2 > 0 \rightarrow \text{pad 3 een toegelaten eindpad.}$$

Nu gaan we paden koppelen:

Wat betreft de notitie maken we de volgende afspraak:

$\vec{V}(t_{ab}) = \lim_{T \uparrow t_{ab}} V(T)$ met t_{ab} het koppeltijdstip van de paden a en b ,
dus ook

$$\vec{V}(t_{ab}) = \lim_{T \uparrow t_{ab}} V(T)$$

We weten dat pad 3 het eindpunt is.

We proberen eerst pad 2 hiervoor te koppelen.

pad 2 voor pad 3?

Gedurende het gehele ontwikkelingspatroon moeten ψ_2 en K continu zijn. Deze twee voorwaarden gebruiken we bij iedere koppeling als eisen voor het wel of niet toegelaten zijn van de betreffende koppeling.

Dus de voorwaarden zijn:

1. continuïteit van ψ_2
2. continuïteit van $K \rightarrow$ continuïteit van $\frac{dS}{dK}$

ad 1

$$\text{Op pad 3 geldt: } \psi_2 = \frac{e^{-iT} - \lambda_2}{1 - \frac{dU}{dI} (I = 0)}$$

$$\text{Op pad 2 geldt: } \psi_2 = \frac{e^{-iT}}{1 - \frac{dU}{dI}}$$

Als ψ_2 continu is op het koppelmoment, dan moet gelden:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e^{-iT}}{1 - \frac{dU}{dI}} = \frac{e^{-iT} - \lambda_2}{1 - \frac{dU}{dI} (I = 0)} \\ \text{er geldt: } e^{-iT} - \lambda_2 \leq e^{-iT} \\ \text{en } 1 - \frac{dU}{dI} (I = 0) \geq 1 - \frac{dU}{dI} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \psi_2 \text{ kan alleen continu zijn als geldt:} \\ 1. \dot{\lambda}_2(t_{23}) = 0 + \dot{\lambda}_2 > 0 \text{ op pad 3} \\ 2. \dot{I}(t_{23}) = 0 \end{array}$$

Dat betekent dat I en λ_2 continu moeten zijn bij deze koppeling.

ad 2

$$\text{Op pad 3 geldt: } a \lambda_2 - \dot{\lambda}_2 = (1 + a - \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI} (I = 0))) e^{-iT}$$

Via de gegevens uit ad 1 weten we dat moet gelden op het koppelmoment:

$$1 + a - \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI} (I = 0)) < 0$$

$$\rightarrow \frac{dS}{dK} > \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI}} \quad (I = 0)$$

$$\text{Op pad 2 geldt: } (i + a - \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) - \frac{\frac{d^2 U}{dI^2} I}{1 - \frac{dU}{dI}}) e^{-iT} = 0$$

Op het koppelmoment moet gelden:

$$\dot{I}(t_{23}) = 0, \text{ dus } \dot{I} < 0$$

$$\rightarrow \frac{dS}{dK} > \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI}} \quad (I = 0)$$

Dus $\frac{dS}{dK}$ kan continu zijn $\rightarrow K$ kan continu zijn \rightarrow deze koppeling is mogelijk.

pad 1 voor pad 2?

2 voorwaarden:

1) ψ_2 continu

2) $\frac{dS}{dK}$ continu

ad 1

$$\text{Er geldt: pad 2: } \psi_2 = \frac{e^{-iT}}{1 - \frac{dU}{dI}}$$

$$\text{pad 1: } \psi_2 = \frac{e^{-iT+\lambda_1}}{1 - \frac{dU}{dI}}$$

Om de continuïteit van ψ_2 te waarborgen, moet op het moment van koppeling gelden:

$$\frac{e^{-iT+\lambda_1}}{1 - \frac{dU}{dI}} = \frac{e^{-iT}}{1 - \frac{dU}{dI}}$$

$$\text{er geldt: } e^{-iT} \leq e^{-iT} + \lambda_1$$

$$\rightarrow \text{er moet gelden: } (1 - \frac{dU}{dI}) (\text{pad 1}) \geq (1 - \frac{dU}{dI}) (\text{pad 2})$$

$$\rightarrow \dot{I} (t_{12}) \leq \dot{I} (t_{12})$$

Op pad 1 geldt: $I = S(K)$

$$\text{Stel: } \dot{I} (t_{12}) > \dot{I} (t_{12}),$$

dan geldt vlak na de koppeling op pad 2: $I > S(K)$ (want een voorwaarde voor de koppeling is de continuïteit van $S(K)$); dat mag niet, want dan wordt er een restrictie geschonden.

Dus er moet gelden:

$$\dot{I} (t_{12}) = \dot{I} (t_{12})$$

$$\rightarrow \dot{\lambda}_1(t_{12}) = 0$$

$$\rightarrow \text{ook bij de koppeling van pad 1 en pad 2 moet gelden: } \begin{array}{l} \lambda_1 \text{ continu} \\ I \text{ continu} \end{array}$$

ad 2

$$\text{Op pad 2 geldt: } i + a - \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}} = 0$$

Op pad 1 geldt:

$$\dot{\lambda}_1 + \lambda_1 (-a + \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}}) = (i + a - \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}}) e^{-iT}$$

Op het koppelingsmoment moet gelden: $\dot{\lambda}_1 < 0$, $\dot{\lambda}_1(t_{12}) = 0$ op pad 1.

We weten: $\dot{I} > 0$ op pad 1.

$$\rightarrow \text{er moet gelden op pad 1: } i + a - \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}} < 0$$

We kunnen nu afleiden.

Voorts de continuïteit van $\frac{dS}{dK}$ is nodig dat $\dot{I}(t_{12}) < \dot{I}(t_{12})$

pad 3 voor pad 1?

- voorwaarden: 1. ψ_1 continu
2. $\frac{dS}{dK}$ continu

ad 1
Er moet gelden:
$$\frac{e^{-iT-\lambda_2}}{1 - \frac{dU}{dI} (I = 0)} = \frac{e^{-iT+\lambda_1}}{1 - \frac{dU}{dI}}$$

Er geldt:
$$\left. \begin{aligned} e^{-iT+\lambda_1} &\geq e^{-iT-\lambda_2} \\ 1 - \frac{dU}{dI} &\leq 1 - \frac{dU}{dI} (I = 0) \end{aligned} \right\} \text{De gelijkheid kan alleen gelden als:}$$

$$\dot{\lambda}_1(t_{31}) = 0$$

$$\dot{\lambda}_2(t_{31}) = 0$$

pad 3 kan + kan niet + $S(K) = 0$ + $I = 0$ op pad 1 + $\dot{I}(t_{31}) = 0$
niet voor pad 1.

pad 2 voor pad 1?

1. continuïteit ψ_2
2. continuïteit $\frac{dS}{dK}$

ad 1
Er moet gelden:
$$\frac{e^{-iT}}{1 - \frac{dU}{dI}} = \frac{e^{-iT+\lambda_1}}{1 - \frac{dU}{dI}}$$

Er geldt:
$$e^{-iT+\lambda_1} \geq e^{-iT}$$

+ er moet gelden: $(1 - \frac{dU}{dI}) (\text{pad 1}) \geq (1 - \frac{dU}{dI}) (\text{pad 2})$

$$+ \dot{I}(t_{21}) \leq \dot{I}(t_{21})$$

$\dot{I}(t_{21})$ mag niet groter zijn dan $\dot{I}(t_{21})$ want $\dot{I}(t_{21})$ zit op zijn bovengrens
($S(K)$ moet continu zijn bij de koppeling).

Dus er moet gelden bij de koppeling: $\dot{\lambda}_1 > 0$, $\dot{\lambda}_1(t_{21}) = 0$, $\dot{f}(t_{21}) = \dot{f}(t_{21})$

ad 2

Op pad 1 moet gelden: ($\dot{\lambda}_1 > 0$, $\dot{\lambda}_1(t_{21}) = 0$):

$$i + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}} > 0$$

Op pad 2 geldt:

$$i + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}} = 0$$

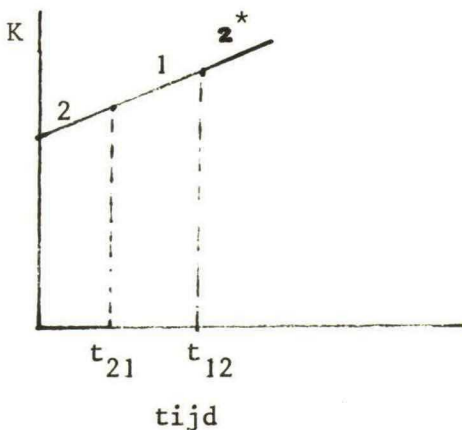
$\dot{I} > 0$ op heel pad 1.

Om de continuïteit van $\frac{dS}{dK}$ te waarborgen, moet gelden:

$$\dot{I}(t_{21}) > \dot{I}(t_{21}) > 0$$

$$\text{Op pad 2 geldt: } i + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}} = 0$$

$$\dot{I} > 0 \text{ op pad 2 houdt in: } \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) > i + a$$



van pad 1 weten we:

$$1. \quad \dot{K} > 0 \rightarrow \frac{dS}{dK} \text{ wordt kleiner op pad 1}$$

$$2. \quad \dot{I} > 0 \rightarrow 1 - \frac{dU}{dI} \text{ wordt kleiner op pad 1}$$

Omdat K en I allebei continu moeten zijn bij de koppelingen, kunnen we concluderen:

$$\frac{dS}{dK}(t_{21})(1 - \frac{dU}{dI}(t_{21})) > \frac{dS}{dK}(t_{12})(1 - \frac{dU}{dI}(t_{12}))$$

Stel: aan het begin van pad 2* geldt: $\dot{I} \leq 0$

$$\text{dan moet gelden: } \frac{dS}{dK}(t_{12})(1 - \frac{dU}{dI}(I = I(t_{12}))) \geq 1 + a$$

$$\text{hieruit volgt: } \frac{dS}{dK}(t_{21})(1 - \frac{dU}{dI}(I = I(t_{21}))) > 1 + a$$

$$\text{maar dan moet gelden: } \dot{I}(t_{21}) < 0$$

tegenspraak!

We hebben nu dus bewezen dat pad 2 niet voor pad 1 kan als $\dot{I} \leq 0$ aan het begin van dat pad 2 wat na pad 1 komt.

Als we nu nog kunnen bewijzen dat $\dot{I} > 0$ op het begin van pad 2, dat na pad 1 komt, zich niet kan voordoen, dan hebben we tevens bewezen dat we pad 2 niet voor pad 1 kunnen koppelen.

Dit bewijs volgt nu:

Stel: $\dot{I} > 0$ aan het begin van pad 2 dat na pad 1 komt.

$$\rightarrow \frac{dS}{dK}(1 - \frac{dU}{dI}) < 1 + a$$

$$\dot{I} > 0 \rightarrow 1. K \uparrow \rightarrow \frac{dS}{dK} \downarrow$$

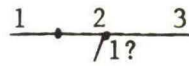
$$2. I \uparrow \rightarrow (1 - \frac{dU}{dI}) \downarrow$$

$$\rightarrow \frac{dS}{dK}(1 - \frac{dU}{dI}) \text{ blijft kleiner dan } 1 + a$$

\dot{I} blijft groter dan 0 op pad 2 en dit is in tegenspraak met de voorwaarde voor koppeling aan pad 3 achter dit pad 2 die inhoudt dat I aan het einde van pad 2 gelijk aan 0 moet zijn.

Conclusie: pad 2 kan niet voor pad 1 gekoppeld worden.

pad 1 voor pad 3 (eindpad)?



1. ψ_2 continu
2. $\frac{dS}{dK}$ continu

ad 1

$$\frac{e^{-iT+\lambda_1}}{1 - \frac{dU}{dI}} = \frac{e^{-iT-\lambda_2}}{1 - \frac{dU}{dI}} \quad (I = 0)$$

we weten:

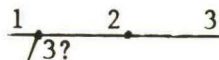
$$\left. \begin{aligned} e^{-iT+\lambda_1} &\geq e^{-iT-\lambda_2} \\ 1 - \frac{dU}{dI} &\leq 1 - \frac{dU}{dI} \quad (I = 0) \end{aligned} \right\} \text{bovenstaande gelijkheid kan alleen gelden als:}$$

$$\dot{\lambda}_1(t_{13}) = 0 \text{ en } \dot{\lambda}_2(t_{13}) = 0 \text{ en } \dot{I}(t_{13}) = 0$$

Maar we weten: $\dot{I} > 0$ op pad 1
tegenspraak.

Dus pad 1 kan niet voor pad 3.

pad 3 voor pad 2?



Continuïteit $\psi_2 \rightarrow$ daarvoor moet gelden:
$$\frac{e^{-iT-\lambda_2}}{1 - \frac{dU}{dI}} \quad (I = 0) = \frac{e^{-iT}}{1 - \frac{dU}{dI}}$$

Deze gelijkheid kan alleen opgaan als geldt: 1. $\dot{\lambda}_2(t_{32}) = 0$
2. $\dot{I}(t_{32}) = 0$

Uit 1 volgt:

$$\dot{\lambda}_2 < 0 \text{ aan het einde van pad 3} \rightarrow \frac{dS}{dK} < \frac{1+a}{1 - \frac{dU}{dI}} \quad (I = 0) \text{ aan het einde van pad 3.}$$

Als $\dot{I}(t_{32}) = 0$ geldt op dat moment op pad 2: $\dot{I} > 0$ (mag hier wel, omdat I dermate klein is dat het K doet dalen ($I < aC$), dus $\frac{dS}{dK}$ doet stijgen).

Op pad 2 geldt: $i + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} I}{1 - \frac{dU}{dI}} = 0$

Uit bovenstaande voorwaarden kunnen we afleiden: $\frac{dS}{dK} < \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI}} (I = 0)$

→ $\frac{dS}{dK}$ kan continu zijn → koppeling is mogelijk.

Het is makkelijk na te gaan dat voor een eventuele koppeling voor dit pad 3 moet gelden: λ_2 continu op het koppelingsmoment.

→ aan het begin van dit pad 3 moet gelden: $\lambda_2 > 0$

→ $\frac{dS}{dK} > \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI}} (I = 0)$

↓

$\frac{dS}{dK}$ daalt op pad 3 → K stijgt op pad 3 } tegenspraak

I = 0 op pad 3

↓
Dus voor dit pad kan niets meer gekoppeld worden

We hebben nu vier ontwikkelingspatronen: 3

2-3

1-2-3

3-2-3

Op de hoofdontwikkelingspatronen 1-2-3 en 3-2-3 gaan we nu nog wat dieper in.

Hoofdontwikkelingspatroon 1-2-3

Eerst gaan we afleiden hoe groot $K(0)$ moet zijn wanneer het patroon 1-2-3 optimaal is.

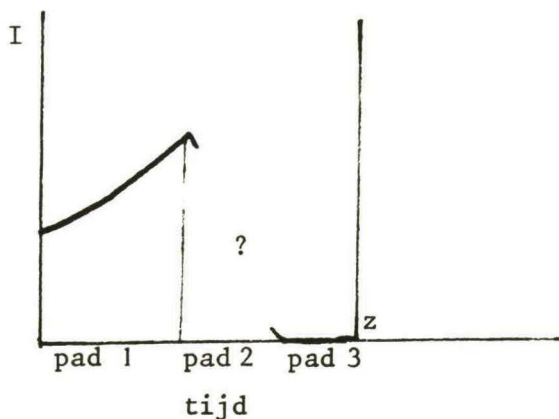
Op tijdstip t_{12} geldt: $\frac{dS}{dK} > \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI}}$

pad 1 is een groeipad → $\frac{dS}{dK}$ aan het einde van pad 1 is kleiner dan $\frac{dS}{dK}$ aan het begin van pad 1.

→ $K(0)$ moet zodanig klein zijn, wil patroon 1-2-3 optimaal zijn, dat geldt:

$$\frac{dS}{dK} (K = K(0)) \gg \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI} (I = I(t_{13}))}$$

Op dit moment weten we het volgende over de grootte van I gedurende het ontwikkelingspatroon 1-2-3:



We moeten dus wat meer te weten zien te komen over de grootte van I op pad 2. Aan het begin van pad 2 geldt:

$$\dot{I} < 0 \rightarrow \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) > i + a$$

$\dot{I} < 0$ heeft tot gevolg: 1. K stijgt zolang $I > aC \rightarrow \frac{dS}{dK}$ daalt;

2. I daalt $\rightarrow 1 - \frac{dU}{dI}$ stijgt

Tevens in overweging nemende dat $\frac{dS}{dK}$ en $1 - \frac{dU}{dI}$ continu zijn op pad 2 zijn er vier mogelijkheden:

1. $\frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right)$ blijft groter dan $i + a$ op pad 2
2. $\frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right)$ wordt gelijk aan $i + a$ als $I > aC$

3. $\frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI})$ wordt gelijk aan $i + a$ als $I = aC$

4. $\frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI})$ wordt gelijk aan $i + a$ als $I < aC$

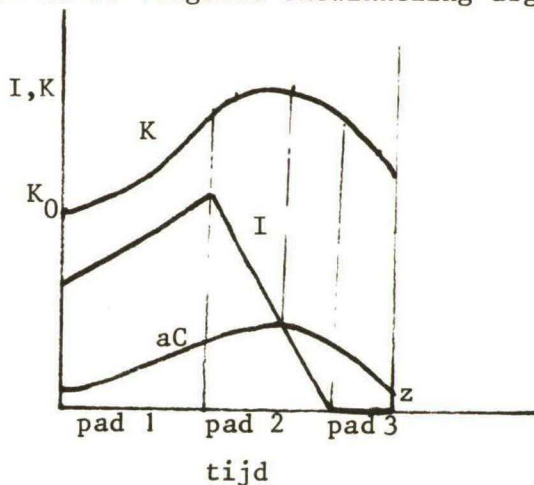
ad 1

$\frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) > i + a$ op geheel pad 2 heeft tot gevolg dat $\dot{I} < 0$ op geheel pad 2

Op een gegeven moment wordt $I < aC$. Dit heeft tot gevolg dat K gaat dalen en dat nu dus ook $\frac{dS}{dK}$ gaat stijgen.

Op pad 2 zal I tot 0 dalen en vervolgens overgaan in pad 3.

We hebben nu de volgende ontwikkeling afgeleid:



ad 2

$$\left. \begin{array}{l} I > aC \\ \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) = i + a \end{array} \right\} K \text{ stijgt en } \dot{I} = 0 \rightarrow \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) < i + a$$

$$\frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dI}) < i + a \rightarrow \dot{I} > 0 \rightarrow K \text{ en } I \text{ stijgen} \rightarrow \frac{dS}{dK} (1 - \frac{dU}{dK}) < i + a$$

etc.

\dot{I} blijft nu groter dan 0 op de rest van pad 2.

Dit mag niet, want $\dot{I}(t_{23})$ moet gelijk aan 0 zijn.

ad 3

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) &= i + a \\ I &= aC \end{aligned} \right\} \dot{I} = 0 \text{ en } \dot{K} = 0 \rightarrow \text{situatie blijft zo}$$

We zijn nu in een stationaire situatie terecht gekomen.

Dit mag niet, want nu is $\dot{I}(t_{23}) \neq 0$.

ad 4

$$\frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) = i + a \text{ als } I < aC$$

Dat betekent dat $\frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) > i + a$ was op $I = aC$

sinds die tijd zijn echter K en I gedaald $\rightarrow \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right)$ is gestegen

tegenspraak \rightarrow deze situatie kan zich niet voordoen.

Hoofdontwikkelingspatroon 3-2-3

Vraag: Hoe groot moet $K(0)$ zijn wil patroon 3-2-3 optimaal zijn?

Op tijdstip t_{32} geldt:

$$\frac{dS}{dK} < \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI}} \quad (I = 0)$$

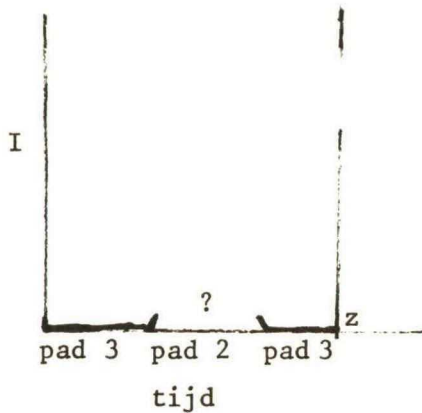
pad 3 is een daalpad $\rightarrow \frac{dS}{dK}$ stijgt op pad 3.

Dat betekent dat $K(0)$ dusdanig groot moet zijn, dat geldt:

$$\frac{dS}{dK} (K = K(0)) < \frac{i + a}{1 - \frac{dU}{dI}} \quad (I = 0)$$

Hoe groot is het verloop van I op het pad 3-2-3?

Bekend is:



$\dot{I} > 0$ aan het begin van pad 2 en $\dot{I} < 0$ aan het einde van pad 2.

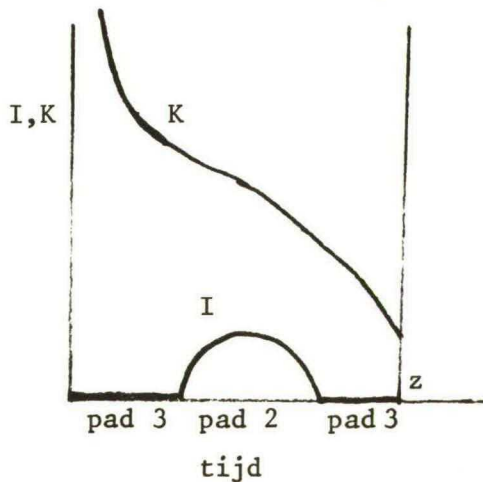
$$\text{Op pad 2 geldt: } i + a - \frac{dS}{dK} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) - \frac{\frac{d^2U}{dI^2} \dot{I}}{1 - \frac{dU}{dI}} = 0$$

I en K zijn continu op pad 2 $\rightarrow \dot{I}$ is ook continu op pad 2.

Dit betekent dat \dot{I} ergens gelijk aan 0 wordt.

Dat mag niet gebeuren op het moment dat $I = aC$ of $I > aC$, want dan wordt $\dot{I}(t_{23}) \neq 0$.

We kunnen nu dus concluderen dat K daalt gedurende het hele patroon. We komen dus uit op het volgende verloop:



Appendix 2

De afleiding m.b.v. het maximum van Pontryagin en de iteratieve procedure van Van Loon van het optimale ontwikkelingspatroon van het model zonder aanpassingskosten.

In deze appendix wordt het model opgelost wat staat aan het einde van hoofdstuk 3. We werken hier met de opbrengstenfunctie $O(K)$, wat voorstelt de opbrengsten na aftrek van de afschrijvingen. Hieruit volgt dat de volgende relatie geldt:

$$O(K) = S(K) - aK \quad (1)$$

Uit de vergelijkingen (25) en (26) van hoofdstuk 3 leiden we af:

$$\left. \begin{array}{l} D = O(K) - X \\ \dot{X} = \dot{K} \end{array} \right\} D = O(K) + aK - I \quad (2)$$

Door deze uitdrukking te substitueren in het betreffende model, komen we tot het volgende:

$$\max_I \int_0^z [O(K) + aK - I] e^{-iT} dT + K(z) e^{-iz} \quad (3)$$

o.v.d.

$$\dot{K} = I - aK \quad (4)$$

$$K > 0 \quad (5)$$

$$O(K) + aK - I \geq 0 \quad (6)$$

$$K(0) = K_0 > 0 \quad (7)$$

Dit model gaan we oplossen met dezelfde technieken als in de vorige appendix.

Lagrangiaan:

$$L = (O(K) + aK - I)e^{-iT} + \psi(I - aK) + \mu \dot{K} + \lambda(O(K) + aK - I) \quad (8)$$

$$\frac{\delta L}{\delta I} = -e^{-iT} + \psi + \mu - \lambda = 0 \quad (9)$$

$$\rightarrow \dot{\psi} = \left(\frac{dO}{dK} + a\right)e^{-iT} - a(\psi + \mu) + \lambda \frac{dO}{dK} + a\lambda \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda(O(K) + aK - I) = 0 \\ \mu \dot{K} = 0 \end{array} \right\} \text{complementariteitsvoorwaarden} \quad (11)$$

$$(12)$$

$$\text{transversaliteitsvoorwaarden: } \psi(z) = e^{-iz} \quad (13)$$

$$\mu(z) K(z) = 0 \quad (14)$$

$$\psi(T) \text{ is continu met stuksgewijs continue afgeleiden op } [0, z] \quad (15)$$

$$\lambda(T) \text{ is niet negatief en continu als } I \text{ continu is} \quad (16)$$

$$\mu(T) \text{ is continu als } \dot{K} \text{ discontinu is} \quad (17)$$

$$\mu(T) \text{ is continu als } I \text{ continu is, niet negatief en niet stijgend} \quad (18)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{K} = I - aK \\ K \text{ is continu} \end{array} \right\} \rightarrow \dot{K} \text{ is discontinu als } I \text{ discontinu is}$$

We hebben nu afgeleid: $\mu(T)$ is continu als I continu is en als I discontinu is $\rightarrow \mu(T)$ is altijd continu.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stel: } \mu \neq 0 \rightarrow K = 0 \\ \text{voor } K = 0 \text{ geldt: } \frac{dO}{dK} > 1 \\ \downarrow \\ \text{Uit deze voorwaarde volgt} \\ \text{dat het altijd rendabel is} \\ \text{om een positieve kapitaal-} \\ \text{goederenvoorraad te hebben} \end{array} \right\} \dot{\mu}(T) = 0 \text{ voor } T \in [0, z]$$

$$\text{Eindsituatie: } \left. \begin{array}{l} \mu(z) K(z) = 0 \\ K(z) \neq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mu(z) = 0 \\ \text{we weten } \dot{\mu} = 0 \\ \mu \text{ continu} \end{array} \right\} \mu(T) = 0 \text{ voor } T \in [0, z]$$

De noodzakelijke voorwaarden worden nu:

$$-e^{-iT} + \psi - \lambda = 0 \quad (19)$$

$$-\dot{\psi} = \left(\frac{dO}{dK} + a\right)e^{-iT} - a\psi + \lambda \frac{dO}{dK} + a\lambda \quad (20)$$

$$\lambda (O(K) + aK - I) = 0 \rightarrow \text{complementariteitsvoorwaarde} \quad (21)$$

$$\psi(z) = e^{-iz} \rightarrow \text{transversaliteitsvoorwaarde} \quad (22)$$

$$\text{De mogelijke paden: } \text{pad} \left| \begin{array}{c} 1 \\ \lambda \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} z \\ 0 \end{array} \right|$$

Voor het bepalen van het eindpad vullen we de eindconditie in (1) in en schrijven we voor T een z:

$$e^{iz} + e^{-iz} - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \text{pad 2 is een toegelaten eindpad}$$

Stel: pad 2 geldt ook al een tijdje hiervoor,
dan geldt:

$$-e^{-iT} + \psi = 0 \rightarrow \dot{\psi} = -i e^{-iT} \quad (23 + 24)$$

$$-\dot{\psi} = \left(\frac{dO}{dK} + a\right)e^{-iT} - a\psi \quad (25)$$

$$(22) \text{ en } (23) \text{ invullen in } (24) \rightarrow \frac{dO}{dK} = 1 \rightarrow K \text{ constant op pad 2, dus } I = aK$$

noodzakelijke voorwaarden voor pad 1:

$$-e^{-iT} + \psi - \lambda = 0 \quad (26)$$

$$-\dot{\psi} = \left(\frac{dO}{dK} + a\right)(e^{-iT} + \lambda) - a\psi \quad (27)$$

(25) differentiëren naar T :

$$i e^{-iT} + \dot{\psi} - \dot{\lambda} = 0 \quad (28)$$

(25) en (27) substitueren in (26):

$$i e^{-iT} - \dot{\lambda} = \frac{dO}{dK} (e^{-iT} + \lambda) \quad (29)$$

$$\text{Op pad 1 geldt ook: } \left. \begin{array}{l} \lambda (O(K) + aK - I) = 0 \\ \lambda > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} O(K) + aK - I = 0 \\ + I > aK \\ + \dot{K} > 0 \text{ op geheel pad 1.} \end{array}$$

$$\text{Uit (28) volgt: } (i - \frac{dO}{dK}) e^{-iT} = \lambda_1 + \dot{\lambda}_1$$

Als we pad 1 voor pad 2 willen koppelen, moet ψ_2 continu zijn.

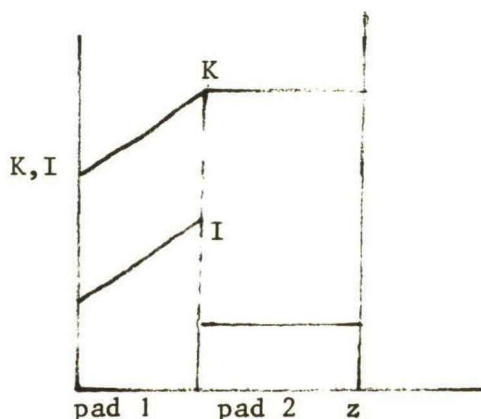
$\rightarrow \lambda$ continu

$$\text{er geldt: } \left. \begin{array}{l} \dot{\lambda} (t_{12}) = 0 \\ \dot{\lambda} < 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{dO}{dK} > i \end{array} \right\} \text{K kan continu zijn}$$

$$\text{na de koppeling geldt: } \frac{dO}{dK} = i$$

Vanwege de afnemende meeropbrengst is $\frac{dO}{dK}$ een dalende functie van K .

Dus op pad 1 ligt het niveau van K onder dat van pad 2. Zo krijgen we de volgende ontwikkeling:



Appendix 3

Afleiding van de centrale beslissingsregel voor de investeringen op hoofdontwikkelingspatroon 1 van het model met aanpassingskosten.

We starten de afleiding met de volgende formule:

$$\psi_2(t_0) = \psi_2(z) - \int_{t_0}^z \dot{\psi}_2 dT \quad (1)$$

Voor de betekenis van en de uitdrukkingen voor $\psi_2(T)$ verwijzen we naar appendix 1.

Vullen we in vergelijking (1) de gegevens van pad 2 en de transversaliteitsvoorwaarde in, dan komen we tot de volgende vorm:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-it_0}}{1 - \frac{dU}{dI}} &= e^{-iz} - \int_{t_0}^z \left(1 - \frac{dS}{dK} e^{-iT} + a \psi_2\right) dT \\ + \frac{e^{-it_0}}{1 - \frac{dU}{dI}} &= e^{-iz} + \int_{t_0}^z \left(\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2\right) dT \end{aligned} \quad (2)$$

$$e^{-it_0} = e^{-iz} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) \int_{t_0}^z \left(\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2\right) dT \quad (3)$$

Pad 3 ligt tegen het eindtijdstip z aan. Om na te gaan of vergelijking (3) ook op pad 3 geldt, nemen we de limiet van de linker- en rechterterm van vergelijking (3) naar z :

$$\lim_{t_0 \rightarrow z} e^{-it_0} = e^{-iz}$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow z} \left(e^{-iz} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) \left(\int_{t_0}^z \left(\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2\right) dT \right) \right) = \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) e^{-iz} < e^{-iz}$$

Uit bovenstaande volgt dat op pad 3 het =teken door een >teken vervangen moet worden.

Wat geldt voor vergelijking (3) op pad 1? Daartoe vullen we de gegevens van pad 1 in in vergelijking (1). Na enig rekenwerk krijgen we dan:

$$e^{-it_0} = e^{-iz} \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) + \left(1 - \frac{dU}{dI}\right) \int_{t_0}^z \left(\frac{dS}{dK} (e^{-iT+\lambda_1}) - a \psi_2\right) dT \quad (4)$$

Om te weten te komen of vergelijking 3 op pad 1 opgaat, differentiëren we de linker- en rechterterm van vergelijking (4) naar t_0 . We willen de waarden van de differentiaal aan het einde van pad 1 weten. Dan geldt:

$$\lim_{T \rightarrow t_{12}} \lambda_1(T) = 0$$

Vullen we dit in in vergelijking (4), dan krijgen we vergelijking (3) weer terug. Daarvan differentiëren we de linker- en rechterterm naar t_0 :

$$\begin{aligned} \frac{d e^{-it_0}}{d t_0} &= -i e^{-it_0} \\ \frac{\delta(e^{-iz}(1 - \frac{dU}{dI}) + (1 - \frac{dU}{dI}) (\int_{t_0}^z (\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2) dT))}{\delta t_0} &= \\ -e^{-iz} \frac{d^2 U}{dI^2} I - \frac{d^2 U}{dI^2} (\int_{t_0}^z (\frac{dS}{dK} e^{-iT} - a \psi_2) dT) + (1 - \frac{dU}{dI})(a \psi_2 - \frac{dS}{dK} e^{-it_0}) & \\ = \frac{d^2 U}{dI^2} I (e^{-iz} + e^{-iz} - \frac{e^{-it_0}}{1 - \frac{dU}{dI}}) + (1 - \frac{dU}{dI}) (\frac{a(e^{-it_0+\lambda_1})}{1 - \frac{dU}{dI}} - \frac{dS}{dK} e^{-it_0}) & \end{aligned}$$

We mogen dus invullen: $\lambda_1 = 0$

$$\rightarrow \frac{d(\dots)}{d t_0} = a e^{-it_0} - \frac{dS}{dK} e^{-it_0} - \frac{dU}{dI} I - \frac{\frac{d^2 U}{dI^2} I^2}{1 - \frac{dU}{dI}} e^{-it_0} < -i e^{-it_0}$$

(zie appendix 1 voor <teken).

Dus de linkerterm groeit aan het einde van pad 1 harder dan de rechterterm. Op het koppelmoment van de paden 1 en 2 zijn de linker- en rechterterm aan elkaar gelijk. Hieruit volgt dat op pad 1 een <teken geldt.

IN 1984 REEDS VERSCHENEN

- | | | |
|--|--|-------|
| 01. P. Kooreman
A. Kapteyn | Estimation of Rationed and Unrationed Household Labor Supply Equations Using Flexible Functional Forms | jan. |
| 02. Frans Boekema
Leo Verhoef | Lokale initiatieven; Sleutel voor werkgelegenheidsontwikkeling op lokaal en regionaal niveau | febr. |
| 03. J.H.J. Roemen | In- en uitstroom van melkvee in de Nederlandse rundveesektor geschat m.b.v. een "Markov"-model | febr. |
| 04. M.D. Merbis | From structural form to state-space representation | febr. |
| 05. R.H. Veenstra
J. Kriens | Steekproefcontrole op ernstige en niet-ernstige fouten (gecorrigeerde versie) | maart |
| 06. Th. Mertens | Kritiek op Habermas' communicatietheorie: een evaluatie van het Gadamer-Habermas-debat en van Habermas' interpretatie van de taalhandelings-theorie. Een onderzoeksverslag | maart |
| 07. P. Bekker
A. Kapteyn
T. Wansbeek | Measurement error and endogeneity in regression: bounds for ML and IV-estimates | maart |
| 08. B.R. Meijboom | An input-output like corporate model including multiple technologies and "make-or-buy" decisions | april |
| 09. J.J.A. Moors | On the equivalence between cooperative games and superadditive functions | april |
| 10. J. van Mier | Gewone differentievergelijkingen met niet-constante coëfficiënten en partiële differentievergelijkingen (vervolg R.T.D. 83.31) | april |
| 11. W.J. Oomens | Het optimale prijs- en reclamebeleid van een monopolist | april |
| 12. P.A. Verheyen | Een dynamische ondernemingstheorie en de reacties op de overheids-politiek | mei |
| 13. G.J.C.Th. van Schijndel | Vermogensverschafferscliënten in statistische en dynamische ondernemingsmodellen | mei |

14. P. Kooreman A. Kapteyn	The effects of economic and demographic variables on the allocation of leisure within the household	mei
15. L. Bosch	Over flexibele produktie-automatisering	juni
16. M. Janssens R. Heuts	On distributions of ratios of dependent random variables	juni
17. J. Plasmans	Specification and estimation of the linkage block of Interplay II (1953-1980)	juni
18. P. Bekker A. Kapteyn T. Wansbeek	Consistent sets of estimates for regressions with correlated or uncorrelated measurement errors in arbitrary subsets of all variables	juni
19. A.L. Hempenius	Dividend policy of large Dutch corporations	juni
20. B.B. van der Genugten K. van der Sloot H.A.J. van Terheijden	Handleiding voor de programma's DATAH en REGAP	juni
21. A.B. Dorsman J. v.d. Hilst	The influence of the calculation-interval on the distribution of returns at the Amsterdam Stock Exchange	juni
22. B.R. Meijboom	Joint and Common Cost Allocation in a Multi-Level Organization	juli
23. Ton J.A. Storcken	Arrow's impossibility theorem on restricted domains	juli
24. E.E. Berns	De Terugtrekking Over politiek en ethiek bij Derrida	juli
25. Chr.H. Kraaijmes	De organisatorische condities voor concrete hulpverlening: een model naar aanleiding van de sociale dienst	juli
26. A.L. Hempenius	The Interpretation of Cross-Sectional Regressions with Variable Constant Terms	aug.
27. J. Kriens J.Th. van Lieshout	Enkele eigenschappen van de kritieke-lijn-methode van Markowitz	aug.
28. A.W.A. Boot	Optimum condities voor een discontinu investeringsprobleem	sept.
29. M.F.C.M. Wijn	Wie liquideert de onderneming?	okt.

30. A.L. Hempenius	Modelling dividend behavior	nov.
31. J.H.J. Roemen	Beslissingsregels voor de investerings- en financieringsactiviteiten van een melkveebedrijf	nov.
32. J. van Mier	Gewone differentievergelijkingen met niet-constante coëfficiënten en partiële differentievergelijkingen (vervolg R.T.D. 84.10)	dec.

IN 1985 REEDS VERSCHENEN

01. H. Roes

Betalingsproblemen van niet olie-
exporterende ontwikkelingslanden
en IMF-beleid, 1973-1983

febr.

Bibliotheek K. U. Brabant



17 000 01059186 6